Entkoppeln von Differentialgleichungen – Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Für eine gegebene quadratische Matrix A kann man folgende Gleichung aufstellen:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}, \qquad \text{wobei} \qquad A \in \mathbb{C}^{N\times N}, \quad \vec{v} \in \mathbb{C}^N, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Gesucht sind Paare $(\lambda, \vec{v})$, die diese Gleichung für eine gegebene Matrix R erfüllen. Die λ's heißen „Eigenwerte", die $\vec{v}$'s „Eigenvektoren" der Matrix R. Für ein Paar $(\lambda, \vec{v})$ sagt man auch, „$\vec{v}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix R". Es gibt immer N solcher Paare (wobei manche Eigenwerte λ auch mehrfach, in unterschiedlichen Paaren, vorkommen können).

Die Eigenwertgleichung kann immer mit einem konstanten Faktor $\alpha \in \mathbb{C}$ multipliziert werden; die Länge der Vektoren $\vec{v}$ ist also nicht eindeutig bestimmt, nur die Richtung. In der Physik normiert man die Eigenvektoren in aller Regel auf Länge $|\vec{v}| = 1$.

Eigenwerte und Eigenvektoren spielen in der Physik eine sehr wichtige Rolle, vor allem dann später in der Quantenmechanik. Aber auch zum Entkoppeln von Differentialgleichungen ist dieses Konzept sehr nützlich und ich möchte kurz skizzieren warum. Danach wollen wir uns anschauen, wie man die λ und $\vec{v}$ für eine gegebene Matrix berechnet.

Entkoppeln von Differentialgleichungen

Gekoppelte Differentialgleichungen treten in der Mechanik dann auf, wenn sich N betrachtete Körper, deren Bewegung bestimmt werden soll, gegenseitig beeinflussen, zum Beispiel, weil sie mit einer Feder verbunden sind. Die Kraft auf einen Körper hängt dann auch von den Orten der anderen ab, sodass die Bewegungsgleichungen wie folgt aussehen:

$$\ddot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_N), \qquad i = 1, \dots, N,$$

mit irgendwelchen Funktionen f_i, die von der Kopplung der Körper untereinander abhängen. Das sind N Differentialgleichungen für N gesuchte Funktionen $x_i(t)$. Für den gängigen Spezialfall, dass die f_i alle linear in den x_i ist sind, also von der Form

$$f_i(x_1, \dots, x_N) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iN}x_N,$$

kann man das obige Differenzialgleichungssystem als Matrixgleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{x}} = A\vec{x}.$$

Jetzt ist es hilfreich, die Eigenvektoren $\vec{v}$ und -werte λ von A zu kennen, denn es gibt folgendes mathematisches Theorem: Wenn man die (normierten) Eigenvektoren als Spalten einer neuen Matrix S schreibt, also

$$S \coloneqq (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_N) \in \mathbb{C}^{N\times N},$$

dann gilt immer automatisch, dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix} =: D_A \quad \Leftrightarrow \quad A = SD_AS^{-1}.$$

D. h. D_A ist die *Diagonalmatrix* zu A und diese hat immer die Eigenwerte von A auf der Diagonalen (das sind dann automatisch gleichzeitig auch die Eigenwerte von D_A). Der Eigenvektor $\vec{v}_i$, wie er in S steht, gehört zum Eigenwert λ_i, wie er in D_A steht.

Setzt man diese Formel für A in das Gleichungssystem ein, erhält man

$$\ddot{\vec{x}} = SD_A S^{-1}\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad S^{-1}\ddot{\vec{x}} = D_A S^{-1}\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{y}} = D_A\vec{y}, \quad \vec{y} \coloneqq S^{-1}\vec{x}.$$

Wir haben also $\ddot{\vec{x}} = A\vec{x}$ in $\ddot{\vec{y}} = D_A\vec{y}$ umgeformt und der Vorteil ist, dass D_A diagonal ist; wir haben somit N *entkoppelte* Differentialgleichungen, alle von der Form

$$\ddot{y}_i = \lambda_i y_i,$$

die sich trivial lösen lassen. Die eigentlich gesuchten Lösungen ergeben sich dann durch einfache Matrixmultiplikation

$$\vec{x} = S\vec{y}.$$

Berechnen der Eigenwerte

Zum Berechnen der Eigenwerte und Eigenvektoren müssen wir uns die definierende Gleichung

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\mathbb{I})\vec{v} = 0$$

anschauen. Diese ist natürlich für $\vec{v} = 0$ gelöst, aber diese triviale Lösung ist in der Physik uninteressant. Eine Matrixgleichung $M\vec{x} = 0$ ist für $\vec{x} \neq 0$ genau dann lösbar, wenn $\det M = 0$ ist (siehe „Details zur Berechnung der Eigenwerte“). In unserem Fall heißt das

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

Für ein gegebenes A kann man diese Determinante berechnen und die Gleichung nach λ auflösen. Alle λ, die diese Gleichung lösen, sind Eigenwerte von A.

Berechnen der Eigenvektoren

Wenn wir die Eigenwerte λ kennen, müssen wir einen nach dem anderen in die definierende Gleichung $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ einsetzen, um den zugehörigen Eigenvektor zu berechnen. Das kann man auch mit dem Gauß-Verfahren und sog. „Minus-eins-Ergänzungstrick“ machen. Man versucht dabei die Matrix $(A - \lambda\mathbb{I})$ (für jeden Eigenwert einzeln) nach den Regeln des Gauß-Verfahrens auf die Gestalt einer Einheitsmatrix zu bringen. Dies gelingt aber nie ganz, da es immer linear abhängige Zeilen gibt (das hängt damit zusammen, dass die Länge von $\vec{v}$ unbestimmt ist – nach einem der Parameter lässt sich also nicht auflösen). Man erhält deswegen immer eine Nullzeile, z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die 0 auf der Diagonalen wird durch eine -1 ersetzt („Minus-1-Ergänzungs-Trick“, siehe letzter Abschnitt) und dann ist die entsprechende Spalte der Eigenvektor zu dem eingesetzten λ, im Beispiel also $\vec{v} = (5, 2, -1, -1)^T$. Formal bedeutet das, das man den sogenannten Kern der Matrix $A - \lambda\mathbb{I}$ berechnet hat.

Details zur Berechnung der Eigenwerte

Warum ist $M\vec{x} = 0$ für $\vec{x} \neq 0$ genau dann lösbar, falls $\det M = 0$? Ich kann das nicht bis ins Detail mathematisch Beweisen, aber ein bisschen Begründung liefern: Schreiben wir uns die gegebene Matrix M mal in Form von Spaltenvektoren $\vec{w}_i \in \mathbb{C}^N$ auf:

$$M = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N).$$

Die Matrixmultiplikation $M\vec{x}$ ergibt dann einen Vektor, der nun gleich dem Nullvektor sein soll. Das entspricht also den N Gleichungen

$$M\vec{x} = \vec{w}_1 x_1 + \vec{w}_2 x_2 + \dots + \vec{w}_N x_N = 0, \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_N)^T.$$

Damit diese Vektorgleichung nach $\vec{x}$ gelöst werden kann, müssen die $\vec{w}_i$, also die Spalten von M, linear abhängig sein. Wenn die Spalten einer Matrix linear abhängig sind, sind immer auch die Zeilen linear abhängig. Das heißt, damit $M\vec{x} = 0$ gelöst werden kann, müssen die Zeilen von M linear abhängig sein. Also kann M per Gauß-Verfahren so umgeformt werden, dass M eine Nullzeile besitzt. Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht durch das Gauß-Verfahren und sie ist stets 0 für eine Matrix mit Nullzeile. Wenn $M\vec{x} = 0$ lösbar ist, gilt also $\det M = 0$.

Begründung des Minus-1-Ergänzungs-Tricks

Beim Lösen eines linearen Gleichungssystems $M\vec{x} = \vec{a}$ ($M, \vec{a}$ bekannt, $\vec{x}$ gesucht) mit dem Gauß-Verfahren wandelt man nach den Regeln des Gauß-Verfahrens $(M|\vec{a}) \to (\mathbb{I}|\vec{x})$ um; d. h. man bringt die Matrix links auf die Form einer Einheitsmatrix und erhält rechts den Lösungsvektor. Für $M = A - \lambda\mathbb{I}$, $\vec{a} = 0$ und $\vec{x} = \vec{v}$ gilt entsprechend

$$(A - \lambda\mathbb{I}|0) \to (\mathbb{I}|\vec{v}).$$

Das funktioniert allerdings nicht, weil $A - \lambda\mathbb{I}$ linear abhängige Zeilen hat; man kann deswegen die linke Seite nicht auf die Form einer Einheitsmatrix bringen. Und der Nullvektor 0 rechts wird sich durch das Gaußverfahren niemals ändern. Im besten Fall kann man also nur folgendes erreichen:

$$(A - \lambda\mathbb{I}|0) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(wir setzten A und einen Eigenwert λ ein, formen mit dem Gauß-Verfahren um und kommen zum Beispiel auf die Form rechts, wo ich mal willkürliche Zahlenbeispiele reingeschrieben habe). Übersetzen wir diese Matrixschreibweise zurück in ein Gleichungssystem, erhalten wir

$$\begin{aligned} v_1 + 5v_3 &= 0 \\ v_2 + 2v_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -v_3 + v_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= -5v_3 \\ v_2 &= -2v_3 \\ v_4 &= v_3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = v_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man erinnere sich, dass Eigenvektoren nur bis auf einen Vorfaktor bestimmt sind (die Länge ist beliebig). In diesem Sinne ist $(-5, -2, 1, 1)^T$ für $v_3 = -1$ der gleiche Vektor wie $(5, 2, -1, -1)^T$, den man durch den Minus-eins-Ergänzungstrick bekommt.